Newtonsche Aufheizung, Abelsche Integralgleichungen zweiter Art und Mittag-Leffler-Funktionen

Rudolf Gorenflo *

Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik

Z. Naturforsch. **42 a,** 1141 – 1146 (1987); received May 25, 1987

Herrn Professor Dr. Dieter Pfirsch mit besten Wünschen zur Vollendung seines sechzigsten Lebensjahres gewidmet

Newtonian Heating, Abel-type Integral Equations and Mittag-Leffler-Functions

The problem of heating a homogeneous half-space by radiation from outside across the plane boundary is considered. Newtonian heating means that the heat flux across the boundary is proportional to the difference of outside temperature and interior boundary temperature. The outside temperature is assumed to be constant and positive, the initial inside temperature is zero everywhere. The problem is one-dimensional in space. The temporal evolution of the inward boundary temperature obeys an Abel integral equation of second kind for whose explicit solution three methods are described (one by Laplace transform, the other two by infinite series defining the Mittag-Leffler function of index 1/2). The explicit solution facilitates discussion of its qualitative properties. Finally, the general Abel integral equation of second kind is treated by Mittag-Leffler functions.

§ 1. Einleitung: Problemstellung und Motivation

Wir behandeln die *Aufheizung eines Halbraumes*, der anfänglich die Temperatur 0 hat und in den aus dem komplementären Halbraum, dessen Temperatur örtlich und zeitlich konstant und positiv ist, Wärme gemäß *Newtons Einstrahlungsgesetz* hineinfließt: *Wärmefluß durch die Wand nach innen proportional zur Differenz zwischen Außentemperatur und innerer Randtemperatur.* Wir setzen den Halbraum als homogenen und isotropen Wärmeleiter voraus und haben dann ein *räumlich eindimensionales Problem:* die Temperatur hängt nur vom Abstand x senkrecht zur Wand und von der Zeit t ab. Man kann auch von Aufheizung eines Stabes sprechen.

Bei geeigneter Skalierung ist die Temperatur $u(x, t)$ gleich der Dichte der Wärmeenergie und die Außentemperatur $\equiv 1$. Wir haben dann zur Bestimmung der Temperatur $u(x, t)$ für $x > 0$, $t > 0$ die *Anfangsrandwertaufgabe*

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \qquad \text{für } x > 0, t > 0, \qquad (1.1)$$

$$u(x, 0) = 0 \qquad \text{für } x > 0, \qquad (1.2)$$

$$-u_x(0, t) = c(1 - u(0, t)) \qquad \text{für } t > 0. \qquad (1.3)$$

Hierbei ist c eine *positive* Konstante und $-u_x(0, t)$ ist der Wärmefluß von außen ($x < 0$) nach innen ($x > 0$).

In § 2 transformieren wir dieses Problem auf eine *lineare Abelsche Integralgleichung zweiter Art*, die sich mit Hilfe einer speziellen *Mittag-Leffler-Funktion* lösen läßt und die (innere) Randtemperatur $u(0, t)$ liefert. Diese kürzen wir mit $\varphi(t)$ ab. Wir haben dann sowohl die Raumtemperatur

$$\varphi(t) = u(0, t)$$

als auch den Randzufluß

$$v(t) = -u_x(0, t) = c(1 - \varphi(t))$$

und können entweder mit der *Lösungsformel*

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-s)}\right) \mathrm{d}s \qquad (1.4)$$

Reprint requests to Prof. Dr. R. Gorenflo, Fachbereich Mathematik, Freie Universität Berlin, Arnimallee 2–6, D-1000 Berlin 33.

* *Anmerkung:* Der Verfasser ist Mitglied des Forschungsschwerpunktes „Modellierung und Diskretisierung“, der von der Kommission für Forschung und wissenschaftlichen Nachwuchs der Freien Universität Berlin unterstützt wird.

0932-0784 / 87 / 1000-1141 $ 01.30/0. – Please order a reprint rather than making your own copy.

des Dirichlet-Problems oder der *Lösungsformel*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v(s)}{\sqrt{t-s}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-s)}\right) \mathrm{d}s \qquad (1.5)$$

des Neumann-Problems $u(x,t)$ für $x > 0$, $t > 0$ angeben. Man vergleiche Cannon [1] oder Duff und Naylor [2].

Die Lösung $u(x,t)$ ist in der Klasse der für $x \to \infty$ nicht zu schnell wachsenden Funktionen *eindeutig* bestimmt. Genaueres findet man bei Cannon [1], Beschränktheit reicht gut hin.

In [3] diskutieren Mann und Wolf das Problem $\{(1.1), (1.2), (1.3)\}$ kurz. Sie geben die Randtemperatur $u(0,t)$ als *Potenzreihe* in $\sqrt{t}$ an, die sie durch *Picard-Iteration* als Lösung der genannten Integralgleichung erhalten. Ihr Ziel ist jedoch die Ermittlung von Eigenschaften der Funktion $\varphi(t) = u(0,t)$ unter Voraussetzung eines allgemeineren nichtlinearen Einstrahlungsgesetzes

$$-u_x(0,t) = G(u(0,t))$$

anstelle unseres speziellen linearen (1.3), bei welchem wir $G(y) = c(1-y)$ haben. Sie stellen an $G(y)$ die Forderungen, eine für $-\infty < y < \infty$ stetige streng monoton fallende Funktion mit $G(1) = 0$ zu sein (dies bedeutet, daß kein Wärmefluß stattfindet, wenn die innere Randtemperatur gleich der konstanten Außentemperatur 1 ist). Man beachte, daß speziell $G(y) = c(1-y)$ diesen Forderungen genügt. Unter einigen weiteren Voraussetzungen (die Glattheit der Funktion G betreffend) beweisen sie *mit erheblichem analytischen Aufwand, daß die Lösung $\varphi(t)$ für $t \geqq 0$ eindeutig existiert und stetig ist, ferner streng monoton von $\varphi(0) = 0$ gegen 1 wächst, wenn t von 0 gegen ∞ läuft.*

Wir wollen hier zeigen, wie man *im linearen Sonderfall $\{(1.1), (1.2), (1.3)\}$ der Newtonschen Aufheizung* aus der expliziten Gestalt der Lösung $\varphi(t)$ und durch direkte Betrachtung der linearen Abelschen Integralgleichung zweiter Art diese Eigenschaften einfacher bekommen kann.

Intuitiv erwartet man, daß die Randtemperatur $\varphi(t) = u(0,t)$ die genannten Eigenschaften hat. Hierzu sei als Kommentar der Anfang des Aufsatzes „*Qualitatives über Wärmeausgleich*" von Pólya [4] zitiert:

„*Der Mathematiker, der an eine physikalische Theorie herantritt, hat mehrere Aufgaben. Er soll entscheiden, ob die sich aus der Theorie ergebenden mathematischen Probleme lösbar und ob sie eindeutig lösbar sind. Diese Untersuchung ist wesentlich, um den inneren Zusammenhalt der Theorie, ihre ‚Übereinstimmung mit sich selbst' zu beurteilen. Er soll vor allem bestimmte quantitative Folgerungen aus der Theorie ziehen. Solche Folgerungen sind unerläßlich, um die Übereinstimmung der Theorie mit den Experimenten zu beurteilen. Er soll jedoch ferner, wenn er nur vermag, auch allgemeine qualitative Folgerungen aus der Theorie ziehen. Solche Folgerungen sind nützlich, um die Übereinstimmung der Theorie mit unseren allgemeinen Eindrücken von den Erscheinungen, mit unseren sogenannten ‚instinktiven Auffassungen' zu beurteilen.*"

Spätere Autoren haben die Fragestellung von Mann und Wolf weiter verallgemeinert. So wird in [5] der Fall variabler Außentemperatur, in [6] auch der Fall (zeitlich) periodischer Außentemperatur untersucht, während in [7] und [8] spezielle Einstrahlungsgesetze interessieren, in denen eine Potenz der inneren Randtemperatur auftritt. Man vergleiche hierzu auch Kapitel 6 von [9] und den Bericht [10].

§ 2. Integralgleichung und explizite Lösung

Aus der Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v(s)}{\sqrt{t-s}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-s)}\right) \mathrm{d}s \qquad (2.1)$$

der Neumannschen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) && \text{für} \quad x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) &= 0 && \text{für} \quad x > 0, \\ -u_x(0,t) &= v(t) && \text{für} \quad t > 0, \end{aligned}$$

bekommt man mit $x = 0$ und (1.3) zur Bestimmung von $\varphi(t) = u(0,t)$ die *lineare Abelsche Integralgleichung zweiter Art*

$$\varphi(t) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} - \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}} \mathrm{d}s, \quad t > 0. \qquad (2.2)$$

Wir können sie auf 3 verschiedene Weisen lösen. Die erste Methode benutzt die Technik der *Laplace-Transformation* und wird in diesem Paragraphen beschrieben. Die zweite und die dritte Methode beruhen auf *Picard-Iteration* für (2.2) bzw. für eine Testgleichung anstelle von (2.2) und anschließender

Faltung von deren Lösung mit der Inhomogenität von (2.2): diese beiden Methoden führen auf *Mittag-Leffler-Funktionen* und werden in § 4 dargestellt.

Zur Behandlung von (2.2) mittels *Laplace-Transformation* verwenden wir die Tabelle des Kapitels 29 von [11]. Mit den Bezeichnungen

$$\tilde{f}(x) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathscr{L}^{-1}\{\tilde{f}(x)\} = f(t)$$

haben wir

$$\mathscr{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^{-3/2}, \quad \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}},$$

und Anwendung des Operators $\mathscr{L}$ algebraisiert die Integralgleichung (2.2) zu

$$\tilde{\varphi}(x) = c\,x^{-3/2} - \frac{c}{\sqrt{x}}\,\tilde{\varphi}(x). \tag{2.3}$$

Es folgt

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{c}{c + \sqrt{x}}. \tag{2.4}$$

Weil Multiplikation mit $1/x$ im Bildbereich Integration im Originalbereich bedeutet, bekommt man

$$\varphi(t) = c \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{c + \sqrt{x}}\right\}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Der Tabelle entnimmt man

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{c + \sqrt{x}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - c\exp(c^2 t)\operatorname{erfc}(c\sqrt{t})$$

mit der *komplementären Fehlerfunktion*

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y. \tag{2.5}$$

Ausführung der Integration gibt

$$\varphi(t) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} - c^2 \int_0^t \exp(c^2\tau)\operatorname{erfc}(c\sqrt{\tau})\,\mathrm{d}\tau \quad \text{für} \quad t \geqq 0. \tag{2.6}$$

Wir haben eine *explizite Darstellung der Lösung* gefunden, wenn auch in Gestalt nicht elementar auswertbarer Integrale.

§ 3. Eigenschaften der Lösung

Bei innerer Anfangstemperatur 0, konstanter Außentemperatur 1 und Newtonscher Einstrahlung erwarten wir, daß *die innere Randtemperatur* $\varphi(t) = u(0, t)$ *stetig und streng monoton von* 0 *gegen* 1 *wächst, wenn die Zeit* t *von* 0 *gegen* ∞ *läuft.* Wir wollen zeigen, daß das mathematische Modell $\{(1.1), (1.2), (1.3)\}$ diese Eigenschaften liefert.

Die *Stetigkeit* der Funktion $\varphi(t)$ für $t \geqq 0$ ist evident. Aus (2.6) folgt übrigens

$$\varphi(t)/\sqrt{t} \to 2c/\sqrt{\pi} \quad \text{für} \quad t \to 0+, \tag{3.1}$$

denn wegen $\operatorname{erfc}(0) = 1$ ist für $0 \leqq t \ll 1$

$$\int_0^t \exp(c^2 s)\operatorname{erfc}(c\sqrt{s})\,\mathrm{d}s \approx t.$$

Für kleine t verhält sich also $\varphi(t)$ wie $2c\sqrt{t/\pi}$, hat also *bei* $t = 0$ *eine Steilstelle.* Das ist angesichts des abrupten Einsetzens der Einstrahlung nicht verwunderlich. Speziell ist

$$\varphi(0) = 0. \tag{3.2}$$

Zur Untersuchung der Wachstumseigenschaften der Funktion $\varphi(t)$ substituieren wir in (2.6) *streng isoton*

$$t = (s/c)^2, \quad \tau = (r/c)^2 \tag{3.3}$$

und bekommen

$$\varphi(t) = \psi(s) = \psi(c\sqrt{t}), \quad s \geqq 0, \ t \geqq 0 \tag{3.4}$$

mit der von der Konstanten c befreiten Funktion

$$\psi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} s - 2\int_0^s r\exp(r^2)\operatorname{erfc}(r)\,\mathrm{d}r. \tag{3.5}$$

Von deren Ableitung

$$\psi'(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - 2s\exp(s^2)\int_s^\infty \exp(-r^2)\,\mathrm{d}r\right) \tag{3.6}$$

wollen wir zeigen, daß sie *positiv* ist für alle $s \geqq 0$. Wieder leistet uns das Buch [11] von Abramowitz und Stegun gute Dienste. Aus ihrer Ungleichung (7.1.13)

$$\exp(s^2)\int_s^\infty \exp(-r^2)\,\mathrm{d}r \leqq \frac{1}{s + \sqrt{s^2 + \frac{4}{\pi}}} \quad \text{für} \quad s \geqq 0$$

folgt

$$\psi'(s) > 0 \quad \text{für} \quad s \geqq 0. \tag{3.7}$$

Also sind $\psi(s)$ für $s \geqq 0$ und $\varphi(t)$ für $t \geqq 0$ *streng monoton wachsende Funktionen.*

Zu zeigen ist noch, daß $\varphi(t) \to 1$ strebt bei $t \to \infty$. Weil φ streng monoton wächst, existiert jedenfalls

$$\mu = \lim_{t \to \infty} \varphi(t), \quad \text{und es ist } 0 < \mu \leqq \infty.$$

Daß $\mu = 1$ sein muß, schließen wir indirekt aus der Integralgleichung (2.2).

Wäre $\mu \neq 1$, so wäre *entweder*

(i) $0 < \mu < 1$ *oder*
(ii) $1 < \mu \leqq \infty$.

Wir beachten nun, daß für $t > 0$ stets $0 < \varphi(t) < \mu$ ist.

Im Falle (i) wäre $0 < \varphi(t) < 1$ für alle $t > 0$, und wegen (2.2) wäre

$$\varphi(t) > \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} - \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu}{\sqrt{t-s}} \, ds$$
$$= \frac{2c}{\sqrt{\pi}} (1-\mu) \sqrt{t} \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

im *Widerspruch* zur Beschränktheit von $\varphi(t)$.

Im Falle (ii) gäbe es reelle Zahlen $b > 1$ und $T > 0$ so, daß $\varphi(t) > b$ wäre für $t > T$. Für $t > T$ wäre dann nach (2.2)

$$\varphi(t) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} - \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^T + \int_T^t \right) \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}} \, ds$$
$$< \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} - \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_T^t \frac{b}{\sqrt{t-s}} \, ds$$
$$= \frac{2c}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - b\sqrt{t-T}) \to -\infty \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

im *Widerspruch* zur Positivität von $\varphi(t)$ für $t > 0$.

Wir müssen $\mu = 1$ als Grenzwert akzeptieren.

Die Darstellung (3.4) lehrt auch, daß die innere Randtemperatur um so schneller wächst (die Aufheizung um so schneller erfolgt), je größer die positive Konstante c ist. Im (von unserer Betrachtung ausgeschlossenen) *Sonderfall* $c = 0$ ist $\varphi(t) \equiv 0$ (isolierende Wand, keine Einstrahlung von außen).

§ 4. Mittag-Leffler-Funktionen

Um für die Integralgleichung (2.2) eine *unendliche Reihe* als Lösung zu bekommen, verwenden wir *gebrochene Integrationsoperatoren* J^α für $\alpha > 0$ gemäß

$$(J^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) \, ds, \quad t \geqq 0. \tag{4.1}$$

Außerdem sei

$$(J^0 u)(t) = u(t) \quad \text{für} \quad t \geqq 0. \tag{4.1'}$$

Diese Operatoren bilden eine *Halbgruppe*, es ist

$$J^{\alpha+\beta} = J^\alpha J^\beta \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0,$$

und für eine natürliche Zahl n bewirkt J^n die n-fach iterierte Bildung der Stammfunktion mit 0 als unterer Integrationsgrenze. (4.1) ist jedenfalls sinnvoll für lokal beschränkte lokal integrierbare Funktionen. Man vergleiche beispielsweise [12], Seite 115ff.

Mit $w(t) = \sqrt{t/\pi}$ schreiben wir (2.2) um in

$$\varphi = 2c\,w - c\,J^{1/2} \varphi. \tag{4.2}$$

Wir benutzen bekannte Eigenschaften der *Gamma-Funktion:*

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$
$$\text{für} \quad x > 0, \quad \Gamma(1) = 1.$$

Außerdem die *Beta-Formel* ([11], Kapitel 6)

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} \, ds = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{4.3}$$

gültig für $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Aus (4.3) folgt

$$\int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \, ds = t^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta). \tag{4.4}$$

Beginnend mit $\varphi_0(t) \equiv 0$ bilden wir gemäß (4.2) die Iterierten

$$\varphi_n = 2c\,w - c\,J^{1/2} \varphi_{n-1} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

und bekommen formal

$$\varphi_n \to \varphi = 2c \sum_{j=0}^{\infty} c^j J^{j/2} w, \tag{4.5}$$

und mit (4.4), (4.3) und $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ schließlich

$$\varphi(t) = 2c \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-c)^j}{\Gamma\left(\frac{3+j}{2}\right)} t^{(j+1)/2}, \quad t \geqq 0. \tag{4.6}$$

Die Funktion $\psi(s) = \varphi((s/c)^2)$ (man vgl. (3.4)) hat die Reihenentwicklung

$$\psi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma\left(\frac{j+3}{2}\right)} s^{j+1}, \quad s \geqq 0. \tag{4.7}$$

Daß die Reihe (4.6) die Integralgleichung (2.2) wirklich löst, erkennt man durch Einsetzen und gliedweise Integration (wieder mittels (4.4)): diese ist erlaubt, da die Reihe schnell genug konvergiert.

Der komplizierte Funktionsausdruck (2.6) hat also die schöne Reihenentwicklung (4.6). Man kann kurz so schreiben:

$$\varphi(t) = 1 - E_{1/2}(-c\sqrt{t}), \quad t \geqq 0, \tag{4.8}$$

$$\psi(s) = 1 - E_{1/2}(-s), \quad s \geqq 0. \tag{4.9}$$

Hier ist $E_{1/2}$ die *Mittag-Leffler-Funktion* zum Index 1/2. Mittag-Leffler [13] hat im Jahre 1903 die Funktionen

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha > 0 \tag{4.10}$$

eingeführt. Sie verallgemeinern die Exponentialfunktion $\exp(z) = E_1(z)$. In [14], Kapitel 18, findet man einen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen E_α. Beispielsweise *fällt* $E_\alpha(-s)$ *streng monoton von* 1 *gegen* 0, wenn s von 0 gegen ∞ läuft. Man bekommt so wieder die in § 3 bewiesenen Eigenschaften der Funktion $\varphi(t)$. Zur allgemeinen Theorie der Mittag-Leffler-Funktionen vergleiche man auch [15], [16], [17].

Mit Hilfe der Mittag-Leffler-Funktionen kann man, allgemeiner als (2.2) auch die spezielle *lineare Volterra-Integralgleichung zweiter Art*

$$u(t) = g(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)\,ds, \quad t > 0 \tag{4.11}$$

mit $\alpha > 0$ und $-\infty < \lambda < \infty$ behandeln. Hierbei sei (einfachheitshalber) die Funktion $g(t)$ *stetig*. Für $0 < \alpha < 1$ ist (4.11) *abelsch*.

Mit $\alpha = 1/2$ tritt sie (nach naheliegender Substitution) im *Tomatensalatproblem* der sphärischen Stereologie auf: In einem festen undurchsichtigen Medium sind Kugeln aus anderem Material eingebettet, und man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Kugelradien. Ermittelt man nun in einem Parallelschnitt mit von Null verschiedener Dicke die Wahrscheinlichkeitsdichte der Radien der herausgeschnittenen Kugelscheiben, so bekommt man aus dieser die Wahrscheinlichkeitsdichte der Kugelradien durch Auflösung einer Abelschen Integralgleichung zweiter Art. Man vgl. [18], [19], [20].

Statt der allgemeinen Gleichung (4.11) löst man zuerst die *Testgleichung*

$$v(t) = 1 + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\,ds, \quad t > 0. \tag{4.12}$$

Aus ihrer Kurzform

$$v = 1 + \lambda J^\alpha v \tag{4.13}$$

bekommt man durch Iteration

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (J^{n\alpha} 1)(t). \tag{4.14}$$

Es ist

$$(J^{n\alpha} 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n\alpha-1} \cdot 1\,ds = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},$$

also

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = E_\alpha(\lambda t^\alpha). \tag{4.15}$$

Die Integralgleichung (4.11) hat die Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (J^{n\alpha} g)(t) \qquad\qquad (4.16)\\ &= g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n\alpha-1} g(s)\,ds, \end{aligned}$$

die man auch in der Form (man vgl. [21])

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t E_\alpha(\lambda(t-s)^\alpha)\, g(s)\,ds, \quad t > 0 \tag{4.17}$$

schreiben kann. Um (4.17) einzusehen, führe man die Differentiation aus und vergleiche mit (4.16), Summation und Integration dürfen wegen der schnellen Konvergenz vertauscht werden.

Mit

$$g(t) = \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}, \quad \lambda = -c, \quad \alpha = 1/2$$

gibt (4.17) (mit φ statt u) auch eine Lösungsformel für die Integralgleichung (2.2), und durch Manipulationen, in denen wir nun Übung haben, bekommen wir wieder die Reihenentwicklung (4.6).

Eine elegante Behandlung des Falles, daß der Exponent α in (4.11) rational ist, findet man in [22].

[1] J. R. Cannon, The One-Dimensional Heat Equation. Addison-Wesley Publishing Company, Reading (Massachusetts) 1984.
[2] G. F. D. Duff and D. Naylor, Differential Equations of Applied Mathematics. John Wiley & Sons, New York 1966.
[3] W. R. Mann and F. Wolf, Quarterly Appl. Math. **9,** 163 (1951).
[4] G. Pólya, Z. Angew. Math. Mech. **13,** 125 (1933).
[5] K. Padmavally, J. Math. Mech. **7,** 533 (1958).
[6] N. Levinson, J. Math. Analysis Appl. **1,** 1 (1960).
[7] J. B. Keller and W. E. Olmstead, Quarterly Appl. Math. **29,** 559 (1972).
[8] W. E. Olmstead and R. A. Handelsman, SIAM Review **18,** 275 (1976).
[9] R. Gorenflo and S. Vessella, Abel Integral Equations: Applications and Analytic Properties, Part II. Preprint Nr. 245/1987, Serie A: Mathematik, Freie Universität Berlin 1987.
[10] R. Gorenflo, Nonlinear Abel Integral Equations: Applications, Analysis, Numerical Methods. Preprint Nr. 248/1987, Serie A: Mathematik, Freie Universität Berlin 1987.
[11] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York 1972.
[12] I. M. Gelfand and G. E. Shilov: Generalized Functions, Vo. I, Properties and Operators. Übersetzt aus dem Russischen. Academic Press, New York and London 1964.
[13] G. M. Mittag-Leffler, C.R. Acad. Sci. Paris (2) **137,** 554 (1903).
[14] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol. 3. McGraw Hill Book Company, New York 1955.
[15] A. Friedman, J. d'Analyse Math. **11,** 381 (1963).
[16] L. Bieberbach, Acta Mathematica **42,** 357 (1920).
[17] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II. B. G. Teubner, Leipzig 1932 (2. Auflage).
[18] G. Bach, Z. wiss. Mikroskopie **64,** 265 (1959).
[19] P. L. Goldsmith, British J. Appl. Physics **18,** 813 (1967).
[20] R. Gorenflo, International Series of Numerical Mathemathics **77,** 103 (1986).
[21] D. Kershaw, Some results for Abel-Volterra integral equations of the second kind. Aus dem Buch von Ch. T. H. Baker and G. F. Miller (eds.), Treatment of Integral Equations by Numerical Methods. Academic Press, London 1982, pp. 273–282.
[22] H. Brakhage, K. Nickel, and P. Rieder, Z. Ang. Math. Phys. **16,** 295 (1965).